Skript zur Vorlesung

Analysis II

im Rahmen der Weiterbildung für Lehrer

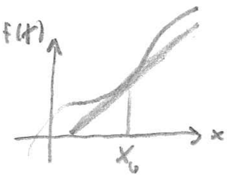
V.Schulze 2016 FU Berlin

Analysis II - Überblick

Weiterbildung für Lehrer

Dozent: V.Schulze

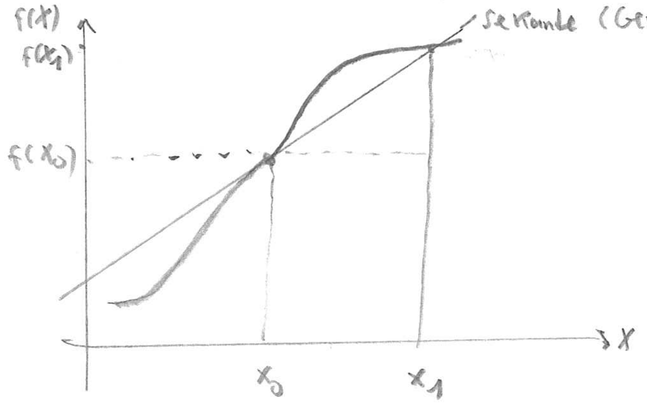
Differentialrechnung



Geg. sei $f: D \to \mathbb{R}$

Geometrische Motivation für die Einführung der Ableitung:

Suche einen geeigneten Tangentenbegriff für $f(x)$ an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $(x_0, f(x_0))$.



Steigung der Sekante:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{(Differenzenquotient)}$$

Gleichung der Sekante:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

Anschauliche Vorstellung:
Nähert sich x_1 dem Wert x_0 auf der x-Achse, so geht die Sekante über in die Tangentengleichung. Dies motiviert die folgende Definition:

Die Steigung der Tangente wird definiert durch

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$, falls der Grenzwert existiert.

Die Tangentengleichung lautet dann

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nennt man auch Differentialquotient.

Def 1 (Ableitung)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Dann:

(i) f in x_0 differenzierbar $:\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Der Grenzwert heißt dann Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ bezeichnet.

(ii) f differenzierbar auf D $:\Leftrightarrow$
f differenzierbar an der Stelle x_0 f.a. $x_0 \in D$.
Die Abbildung $f': D \to \mathbb{R}$ def. durch $x \mapsto f'(x)$ f.a. $x \in D$ heißt dann Ableitung von f.

Anmerkung 1 Der Differentialquotient $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ läßt sich auch schreiben in der Form $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Anmerkung 2

Werden bei der Grenzwertbildung des Differentialquotienten nur Werte $x > x_0$ zugelassen, so spricht man von rechtsseitiger Differenzierbarkeit. Werden nur Werte $x < x_0$ zugelassen, so spricht man von linksseitiger Differenzierbarkeit.
Offenbar ist f in x_0 differenzierbar gdw f in x_0 rechts- und linksseitig differenzierbar ist und beide Grenzwerte übereinstimmen.

Satz 1 (Differenzierbarkeit und lineare Approximation)
Geg. sei $f: D \to \mathbb{R}$.
f in x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$
Ex. eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Abbildung $r: D \to \mathbb{R}$, so daß gilt:
$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0$.

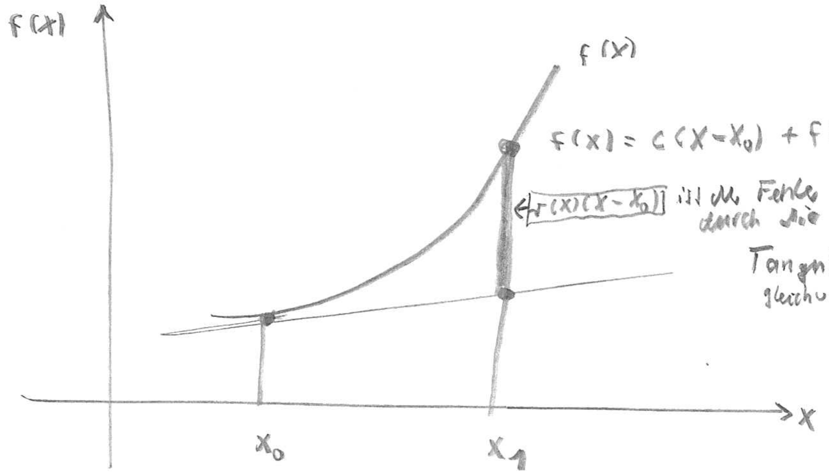
Dabei ist $c = f'(x_0)$, wenn f in x_0 differenzierbar ist.

Bew: Es gilt (beachte: bei der Grenzwertbildung $\lim_{x \to x_0}$ nähert sich x dem Wert x_0; stets ist aber $x \neq x_0$! Def. des Grenzwertes)

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + r(x),$$

also $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0$.

Anschauliche Deutung der linearen Approximation



$f(x) = c(x - x_0) + f(x_0) + r(x)(x - x_0)$

$\boxed{r(x)(x-x_0)}$ ist der Fehler bei der Approximation von $f(x)$ durch die Tangente.

Tangentengleichung: $y = c \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

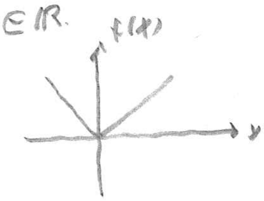
$c = f'(x_0)$

Bsp 1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n$ f.a. $x \in \mathbb{R}$.

Dann: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{\boxed{\text{binomische Formel}}}{=}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^n} + \binom{n}{1} x_0^{n-1} \cdot h + \ldots + \binom{n}{n} x_0^n h^n - \cancel{x_0^n}}{h} = \binom{n}{1} \cdot x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}.$$

Bsp 2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$ f.a. $x \in \mathbb{R}$.



Für $x_0 > 0$ ex. $f'(x_0)$ und es gilt $f'(x_0) = 1$.

Für $x_0 < 0$ ex. $f'(x_0)$ und es gilt $f'(x_0) = -1$

Sei $x_0 = 0$.

Rechtsseitige Ableitung: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$

Linksseitige Ableitung: $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$.

$f'(0)$ ex. also nicht.

Satz 2

f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

(Die Umkehrung ist falsch; s. Bsp 2)

Bew

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \underset{\boxed{\text{Satz 1}}}{=} \lim_{x \to x_0} \Big(f(x_0) + c(x - x_0) + \underbrace{r(x)(x - x_0)}_{0} \Big) = f(x_0)$$

, also ist f in x_0 stetig.

Satz 3

Seien f, g in x_0 differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann

(i) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

(ii) (Produktregel)

$(f \cdot g)'(x) = (f' \cdot g)(x) + (f \cdot g')(x)$

(iii) Sei $g(x) \neq 0$. Dann: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

(iv) (Quotientenregel) Sei $g(x) \neq 0$. Dann: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f' \cdot g(x) - f \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Beweis

(i) klar

(ii) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \underbrace{f(x+h)}_{\to f(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x)$

falls die Grenzwerte rechts ex.

da f nach Satz 2 stetig

$= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

(iii) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} = \frac{1}{(g(x))^2} \cdot (-g'(x))$

$g(x+h) \to g(x)$ da g stetig.

Beachte: $g(x+h) \neq 0$ für hinreichend klein h, da g stetig.

(iv) Folgt aus ii) und (iii)

Bsp 3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ (nach Bsp 1 und Satz 3 (iii)).

Satz 4 (Kettenregel)

Gegeben seien $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: f(D) \to \mathbb{R}$:
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(D) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$
Also ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}$ definiert.

Sei f in x differenzierbar und g in $f(x)$ differenzierbar.

Dann:

$g\circ f$ ist in x differenzierbar, und es gilt
$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Schreibweise für die Kettenregel (als Merkregel)

$$\frac{d\, g\circ f}{dx} = \frac{d\, g\circ f}{df} \cdot \frac{df}{dx} \qquad (df \text{ wird \underline{formal} gekürzt})$$

Beweisansatz: Verwende die lineare Approximierbarkeit in Satz 1.

Achtung Der Ansatz $\dfrac{g\circ f(x+h) - g\circ f(x)}{f(x+h) - f(x)} \cdot \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{g\circ f(x+h) - g\circ f(x)}{h}$

ist nicht zulässig, da $f(x+h) - f(x)$ Null werden kann.
Ist f injektiv, so kann dieser Beweisansatz zum Beweis von Satz 4 verwendet werden.

Satz 5

Sei $f: D \to f(D)$ umkehrbar und f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$.

Sei $y_0 := f(x_0)$ und $y := f(x)$

Dann:

f^{-1} ist in y_0 differenzierbar, und es gilt $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

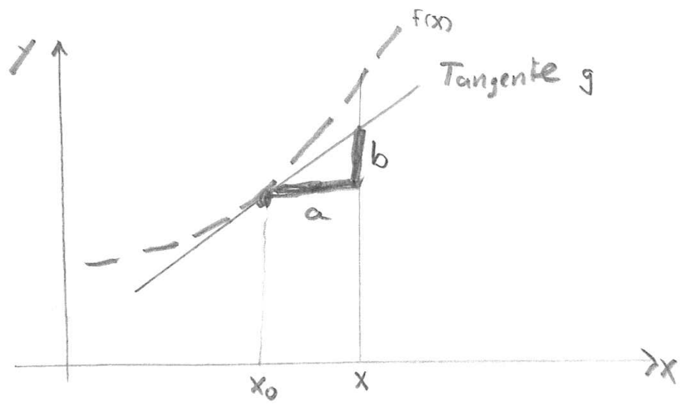
Beweis $$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}}$$

Die Umformung ist zulässig, da $x - x_0 \neq 0$, falls $y - y_0 \neq 0$ (f ist ja umkehrbar) und $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$, falls $|x - x_0|$ "klein genug" ist (beachte $f'(x_0) \neq 0$).

Anschauliche Deutung von Satz 5

Anstieg der Tangente g im (x,y)-Koordinaten-System: $\frac{b}{a}$

Anstieg der Tangente g im (y,x)-Koordinaten-System: $\frac{a}{b}$



Bem 1 (Beispiele für Ableitungen)

(1) $(e^x)' = e^x$

Bew: Wir werden später sehen, daß Potenzreihen gliedweise differenziert werden dürfen. Wegen $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ergibt sich hieraus die Behauptung.

Ein weiter Beweis ergibt sich wie folgt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^{x_0}$$

$\boxed{\text{beachte } e^h - 1 = \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots; \text{ also } \frac{e^h-1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots \xrightarrow[h\to 0]{} 1}$

(2) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Bew Sei $e^x = y$, also $\ln y = x$. Dann gilt

$$(\ln y)' \underset{\boxed{\text{s. obigen Satz 5}}}{=} \frac{1}{(e^x)'} \underset{(1)}{=} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

(3) Sei $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Dann: $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$.

Bew $(x^a)' = (e^{a \ln x})' \underset{\boxed{\text{Kettenregel}}}{=} \frac{a}{x} \cdot e^{a \ln x} = a x^{a-1}$.

(4) Sei $c > 0$. Dann

$(c^x)' = c^x \cdot \ln c$

Bew $(c^x)' = (e^{x \ln c})' \underset{\boxed{\text{Kettenregel}}}{=} \ln c \cdot (e^{x \ln c}) = \ln c \cdot c^x$.

(5) $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

1. Bew: Die Beh. ergeben sich, indem die zugehörigen Potenzreihen gliedweise differenziert werden.

2. Bew

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2} \cos(x_0 + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \cos(x_0 + \tfrac{h}{2})}_{\cos x_0} = \cos x_0$$

$\boxed{\text{Wende auf } \sin((x_0+\frac{h}{2})+\frac{h}{2}) - \sin((x_0+\frac{h}{2})-\frac{h}{2}) \text{ das Additionstheorem für den sin an}}$

$\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ $\boxed{\text{siehe die geometr. Einführung von sin in Analysis I}}$

$\lim_{h\to 0} \cos(x_0+\frac{h}{2}) = \cos x_0$ $\boxed{\text{da der cos stetig}}$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' \underset{\text{s.o.}}{=} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

(6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Bew: Wende die Quotientenregel an auf $\frac{\sin x}{\cos x}$ $(= \operatorname{tg} x)$.

(7) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Bew Sei $y = \operatorname{arctg} x$, $\operatorname{tg} y = x$. Dann:

$$\frac{dy}{dx} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \underset{(6)}{=} \cos^2 y \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{1+x^2}$$

$\boxed{\text{s. obigen Satz 5}}$ $\boxed{\text{beachte: } x = \operatorname{tg} y}$

Bsp 3 (Einfache Beispiele)

$(\sin(\cos x))' = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)$,

$\cos(x^2) = -\sin x^2 \cdot 2x$,

$\ln(\ln x) = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Lokale Extrema, Mittelwertsatz

Def 2 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ gegeben.

Sei x_0 innerer Punkt von D.

Dann:

(i) x_0 lokales Maximum (oder relatives Maximum) von f :⟺

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0): \ f(x) \leq f(x_0)$$

Analog wird ein lokales Minimum definiert.

(ii) x_0 isoliertes (lokales) Maximum von f :⟺

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0): \ f(x) < f(x_0).$$

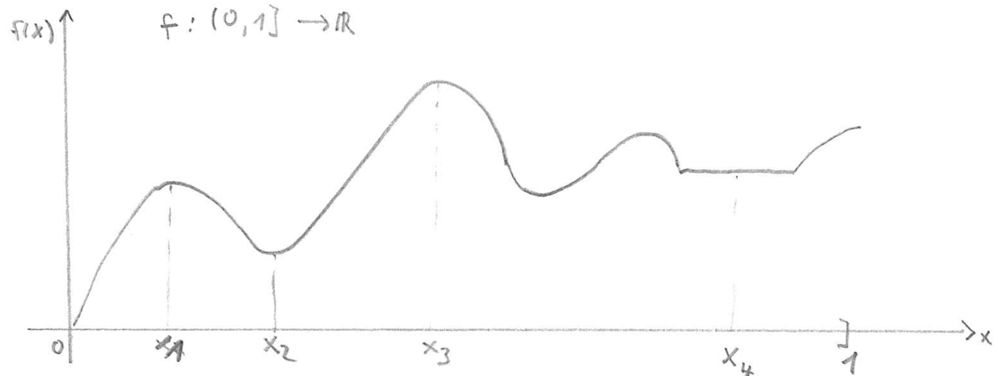
Analog wird ein isoliertes (lokales) Minimum von f definiert.

(iii) x_0 lokaler Extremwert (oder relativer Extremwert) :⟺

x_0 lokales Maximum oder lokales Minimum.

Analog wird isolierter lokaler Extremwert definiert.

Bsp 4



Min. von f auf $(0,1]$ ex. nicht (beachte: $f(0)$ ist nicht definiert)

x_1 isoliertes Maximum

x_2 isoliertes Minimum

x_3 Maximum von f auf $(0,1]$ (heißt auch absolutes Max. von f); auch isoliertes Max.

x_4 lokales Minimum, aber nicht isoliertes Minimum.

Satz 6

$f: D \to \mathbb{R}$ besitze in x_0 ein lokales Extremum.

Sei f in x_0 differenzierbar.

Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Bew (für lokales Maximum)

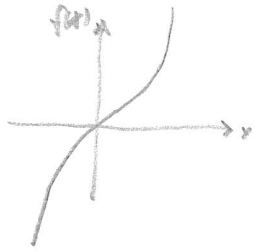
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

beachte:
Der Zähler ist ≤ 0
Der Nenner ist > 0

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

beachte:
Der Zähler ist ≤ 0
Der Nenner ist < 0

Bsp 5 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3$ f.a. $x \in \mathbb{R}$.
Offenbar ist f streng monoton steigend.
Also besitzt f kein lokales Extremum.
Es gilt aber $f'(0) = 0$.
Satz 1 ist also nicht umkehrbar.
Genaueres folgt in Satz 9 und nachfolgender Anmerkung



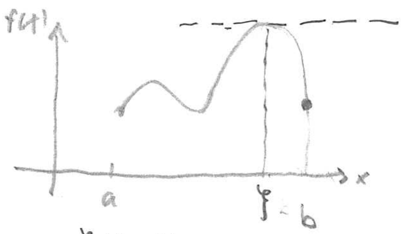
Satz 7 (Rolle)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ;

f differenzierbar auf (a,b).

Gelte $f(a) = f(b)$

Dann ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



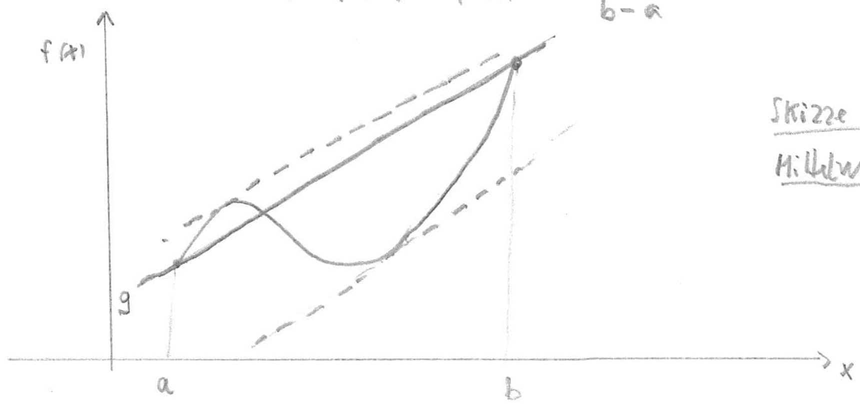
ξ ist nicht notwendig eindeutig

Bew
1. Fall: f ist auf $[a,b]$ konstant. Dann ist die Beh. trivial.
2. Fall: f ist auf $[a,b]$ nicht konstant.
Als stetige Funktion nimmt f auf dem kompakten Intervall ein Minimum und ein Maximum an.
Da f nicht konstant ist, liegt das Minimum oder das Maximum in (a,b).
Sei $\xi \in (a,b)$ Minimum oder Maximum von f.
Nach Satz 1 ist dann $f'(\xi) = 0$.

<u>Satz 8</u> (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ;
f differenzierbar auf (a,b).
Dann ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

<u>Bew</u> Wende Satz 2 an auf $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.



<u>Skizze zum Mittelwertsatz</u>

zu g ex. (mindestens) eine parallele Tangente.

<u>Folgerung 1</u> (Anwendungen des Mittelwertsatzes)

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, f differenzierbar auf (a,b). Dann:

(i) Gilt $f'(x) = 0$ f.a. $x \in (a,b)$, so ist f konstant.

(ii) Gilt $f'(x) \geq 0$ f.a. $x \in (a,b)$, so ist f monoton wachsend in $[a,b]$
Gilt $f'(x) \leq 0$ f.a. $x \in (a,b)$, so ist f monoton fallend. in $[a,b]$

(iii) Gilt $f'(x) > 0$ f.a. $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachend in $[a,b]$
Gilt $f'(x) < 0$ f.a. $x \in [a,b]$, so ist f streng monoton fallend in $[a,b]$.

<u>Bew</u> Man wende den Mittelwertsatz an.

<u>Satz 9</u>

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x \in (a,b)$
und f in x 2-mal differenzierbar. Dann:

$f'(x)=0,\ f''(x)>0 \Rightarrow x$ isoliertes lokales Minimum von f
$f'(x)=0,\ f''(x)<0 \Rightarrow x$ isoliertes lokales Maximum von f.

<u>Anmerkung</u>

Mit Hilfe von Taylorreihen wird später bewiesen:
Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n-mal differenzierbar ; $x_0 \in (a,b)$.
Gelte $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x) \neq 0$.
Dann:
(i) Ist n ungerade, so ist x_0 kein lokaler Extremwert von f.
(ii) Sei n gerade.
Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist x_0 lokales Maximum von f.
Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist x_0 lokales Minimum von f.

<u>Beweis v. Satz 9</u>

Sei oBdA $f''(x) > 0$.
Dann gilt

$$\frac{f'(\xi) - \overset{0 \text{ (nach Vor.)}}{\cancel{f'(x)}}}{\xi - x} > 0 \quad \text{für } \xi \in U_\varepsilon(x) \text{ bei hinreichend kleinem } \varepsilon.$$

Für $\xi > x$ ist also $f'(\xi) > 0$, nach obiger Folgerung 1 also f streng monoton steigend.
Für $\xi < x$ ist also $f'(\xi) < 0$, nach obiger Folgerung 1 also f streng monoton fallend.

<u>Bsp</u>

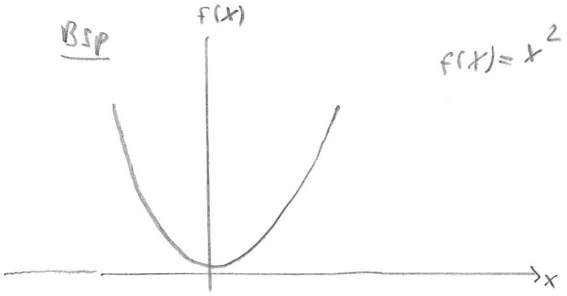
(i) $f(x) = x^2$ besitzt bei $x=0$ ein isoliertes lokales Minimum (nach Satz 9)
(ii) $f(x) = x^3$ besitzt bei $x=0$ keinen lokalen Extremwert (nach obiger Anmerkung, Satz 9 ist nicht anwendbar.)
(iii) $f(x) = x^4$ besitzt bei $x=0$ ein lokales Minimum (nach obiger Anmerkung, Satz 4 ist nicht anwendbar.)
Das Bsp zeigt, daß Satz 9 nicht umkehrbar ist.

Def 3 (lokale Umkehrbarkeit)

$f: D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ lokal umkehrbar $:\Longleftrightarrow$

$\exists \varepsilon > 0$: f ist umkehrbar auf $U_\varepsilon(x_0) \cap D$
(bzw f ist injektiv auf $U_\varepsilon(x_0) \cap D$,
bzw $f: U_\varepsilon(x) \cap D \to f(U_\varepsilon(x_0) \cap D)$ ist bijektiv.)

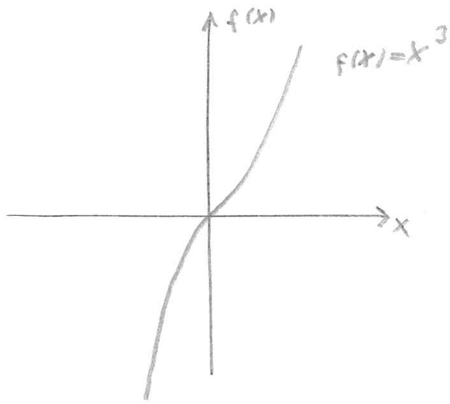
Bsp



f ist lokal umkehrbar in x_0, falls $x_0 \neq 0$.

f ist nicht lokal umkehrbar in $x_0 = 0$.

Bsp



f ist lokal umkehrbar in x_0 für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

f ist sogar (global) umkehrbar auf $\mathbb{R}$ (da f auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend ist).

Satz 10

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ für ein $\varepsilon > 0$.

Sei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist f in x_0 lokal umkehrbar

Bew

Nach obiger Folgerung ist f auf $U_{\varepsilon'}(x_0)$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, also umkehrbar.

Satz 11 (Regel von l'Hospital) (ohne Beweis)

Es seien $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(dabei ist auch $a = -\infty$ bzw. $b = \infty$ zugelassen).

Sei $g(x) \neq 0$ f.a. $x \in (a,b)$ und $g'(x) \neq 0$ f.a. $x \in (a,b)$.

(also sind $\frac{f(x)}{g(x)}$ und $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ def. f.a. $x \in (a,b)$.)

Gelte

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ oder

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

(Da f nur auf (a,b) def. ist, ist also der rechtsseitige Grenzwert zu bilden)

Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert (zugelassen ist dabei auch der Grenzwert ∞ bzw. $-\infty$).

Analog gilt dies auch für den linksseitigen Grenzwert gegen b.

Bsp 6

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$ beachte: Der cos ist stetig

(ii) Sei $\alpha > 0$. Dann:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha} \ln x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^{\alpha}}{\alpha} = 0$$

(iii) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{x \cdot \ln x} = e^{\left(\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \cdot \ln x\right)} \overset{(ii)}{=} e^0 = 1.$$

beachte: Die e-Fkt ist stetig

(iv) Sei $\alpha > 0$. Dann:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \cdot \alpha \cdot x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^{\alpha}} = 0.$$

Satz 12 (gliedweise Differenzierbarkeit) (ohne Bew.)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei die Funktionenfolge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent.

Es existiere ein $x_0 \in [a,b]$, so daß $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Dann:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$:

$$g\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x).$$

(ii) $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f'(x)$.

Folgerung 2 (Differentiation von Potenzreihen)

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ besitze den positiven Konvergenzradius r und auf (x_0-r, x_0+r) die Grenzfunktion f.

Dann ist f in (a,b) differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

In diesem Sinn dürfen Potenzreihen "gliedweise" differenziert werden.

Bew

Sei $x \in (x_0-r, x_0+r)$

Betrachte ein $a \in \mathbb{R}$, so daß gilt: $x \in [x_0-a, x_0+a] \subseteq (x_0-r, x_0+r)$.

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt leicht, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ denselben Konvergenzradius besitzen.

Bekanntlich konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ dann auf $[x_0-a, x_0+a]$ gleichmäßig (Analysis I). Also folgt die Behauptung aus dem obigen Satz.

Beispiel 7

(i) Für $|x|<1$ betrachte man die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Durch Differentiation erhält man

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots$$

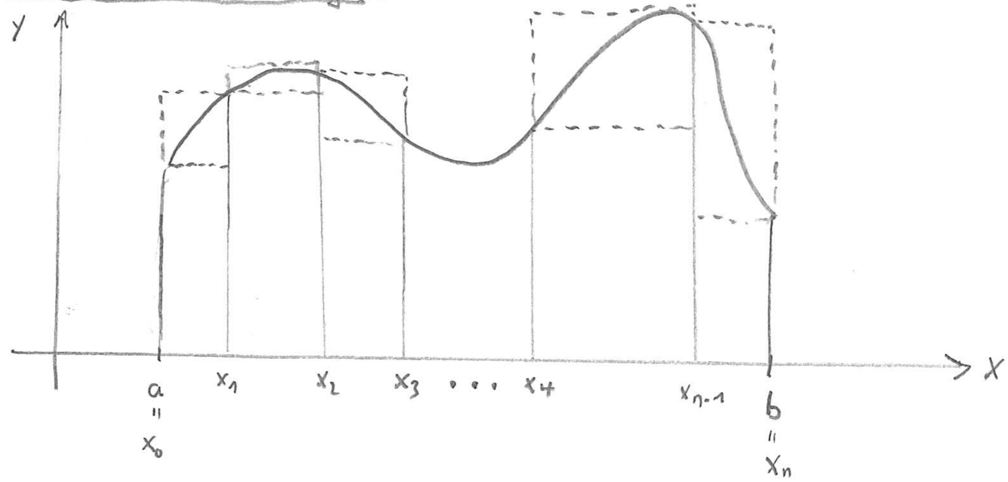
Durch wiederholtes differenzieren erhält man eine Potenzreihenentwicklung für $\frac{1}{(1+x)^n}$ (für $|x|<1$)

Anmerkung:
Wir werden später sehen, daß man Potenzreihen auch gliedweise integrieren kann.
Anwendung auf die Potenzreihe für $\frac{1}{1-x}$ liefert dann eine Potenzreihenentwicklung für $\ln(1+x)$ für $|x|<1$.

Integralrechnung

Ziel Führe ein geeignetes Flächenmaß ein.

Das Riemann Integral



Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ gegeben; $x_0 := a < x_1 < \dots < x_n = b$.

$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt Zerlegung von $[a,b]$.

$I_k := [x_{k-1}, x_k]$ heißt k-tes Teilintervall von Z $(k = 1, \dots, n)$.

Die Länge von I_k wird definiert durch $\Delta I_k := x_k - x_{k-1}$

$\|Z\| := \max\{\Delta I_k \mid k = 1, \dots, n\}$ heißt Norm von Z.

Seien Z_1, Z_2 zwei Zerlegungen von $[a,b]$.
Dann heißt Z_2 Verfeinerung von Z_1, wenn $Z_1 \subseteq Z_2$.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, Z Zerlegung von $[a,b]$.
Dann:

$$\overline{S}(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} \Delta I_k \cdot \sup_{x \in I_k} f(x) \quad \text{(Obersumme von f bzgl. Z)}$$

$$\underline{S}(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} \Delta I_k \inf_{x \in I_k} f(x) \quad \text{(Untersumme von f bzgl. Z).}$$

Da f beschränkt ist, ex. $\sup_{x \in I_k} f(x)$ und $\inf_{x \in I_k} f(x)$ jeweils (das Maximum bzw. Min. muß natürlich nicht existieren).

$\overline{S}(f,Z)$ ist der Flächeninhalt der oberen "Treppenfunktion",
$\underline{S}(f,Z)$ ist der Flächeninhalt der unteren "Treppenfunktion" (s. Skizze oben).

<u>Bem 1</u> (i) $Z_1 \subseteq Z_2 \Rightarrow \overline{S}(f, Z_1) \geq \overline{S}(f, Z_2)$
$\underline{S}(f, Z_1) \leq \underline{S}(f, Z_2)$ [Bew klar]

(ii) Für zwei Zerlegungen Z_1 und Z_2 von $[a,b]$ gilt stets (nach (i))

$$\underline{S}(f, Z_1) \leq \underline{S}(f, Z_1 \cup Z_2) \leq \overline{S}(f, Z_2)$$

(iii) Nach (ii) existieren

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx := \inf_{\substack{Z \text{ Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} \overline{S}(f, Z) \quad \text{(Oberintegral von } f \text{ über } [a,b])$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx := \sup_{\substack{Z \text{ Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} \underline{S}(f, Z) \quad \text{(Unterintegral von } f \text{ über } [a,b])$$

und es gilt stets

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

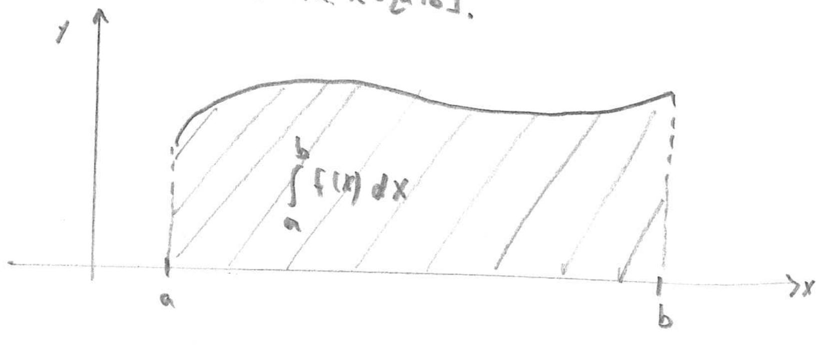
<u>Def 1</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, so heißt f (Riemann-) integrierbar auf $[a,b]$,

und es wird definiert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \left(= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \right).$$

<u>Bem</u> $\int_a^b f(x)\,dx$ ist ein Maß für den Flächeninhalt der Punktmenge zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich des Intervalls $[a,b]$, wenn $f(x) \geq 0$ ist f.a. $x \in [a,b]$.



Bem 2 (ohne Beweis)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt,

sei $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}\|Z_k\|=0$.

Dann gilt

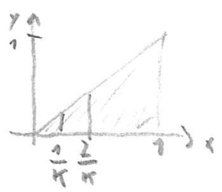
$$\lim_{k\to\infty}\underline{S}(f,Z_k)=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{k\to\infty}\overline{S}(f,Z_k)=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Also muß zur Berechnung von Ober- und Unterintegralen nicht die Gesamtheit aller Zelegungen betrachtet werden.

Bsp 1

Beh $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$



Bew: Für $k\in\mathbb{N}$ betrachte man die Zerlegung $Z_k:=\{0,\frac{1}{k},\dots,\frac{k-1}{k},\frac{k}{k}\}$.

Dann ist $\overline{S}(f,Z_k)=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{k}\cdot\frac{i}{k}=\frac{1}{k^2}(1+2+\dots+k)=\frac{1}{k^2}\,\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}$,

also $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}$.

Ferner ist $\underline{S}(f,Z_k)=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{k}\,\frac{i-1}{k}=\frac{1}{k^2}(0+1+\dots+k-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$,

also $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$. Zusammen folgt die Beh.

Bsp 2 Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ def. durch $f(x):=\begin{cases}1 & \text{für } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

Dann gilt $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=0$; $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx=0$, da bekanntlich in jedem Teilintervall von $[a,b]$ mindestens ein Element aus $\mathbb{Q}$ und mindestens ein Element aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ liegt.

$\int_0^1 f(x)\,dx$ existiert also nicht.

Satz 1

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

(i) f stetig $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ existiert.

(ii) f monoton $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ existiert.

Beweis

(i) Da $[a,b]$ kompakt ist, ist f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig (nach Analysis I).

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

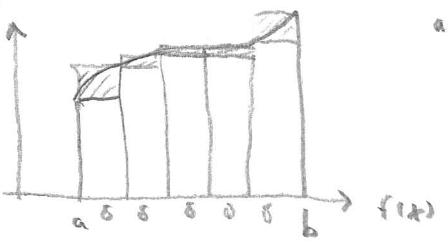
Dann existiert ein $\delta > 0$ mit: $\forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$. Dann folgt:

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \underbrace{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} \le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\right)}_{= b-a} \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{sei } Z = \{x_0, \dots, x_n\}}$

(ii)



analog zu (i) (Beweisskizze):
Obersumme − Untersumme =
Flächeninhalt der schraffierten Rechtecke
$= (f(b) - f(a)) \cdot \delta$

Satz 2 Seien $f, g : [a,b]$ integrierbar. Dann:

(i) $\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx$, (klar nach Def. des Integrals)

(ii) $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx$ ex, (ohne Bew)

(iii) $\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx$ ex., falls $\frac{1}{f(x)}$ auf $[a,b]$ beschränkt ist (ohne Bew)

(iv) $c \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,f(x)\,dx \quad (c \in \mathbb{R})$ (klar nach Def. des Integrals)

(v) $|f(x)|$ ist auf $[a,b]$ integrierbar, und es gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ (ohne Bew)

<u>Satz 3</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, $a\le c\le b$. Dann ex. die Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Bew: folgt leicht aus der Def. des Integrals.

<u>Satz 4</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar;

Sei $f_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $f(x)\neq f_1(x)$ nur für endlich viele x (oder auch abzählbar viele x).

Dann ex. $\int_a^b f_1(x)\,dx$, und es gilt $\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

[folgt leicht aus der Def. von Integralen].

<u>Satz 5</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Dann

(i) $(b-a)\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

(ii) Ist f stetig, so ex. ein $\xi\in[a,b]$ mit

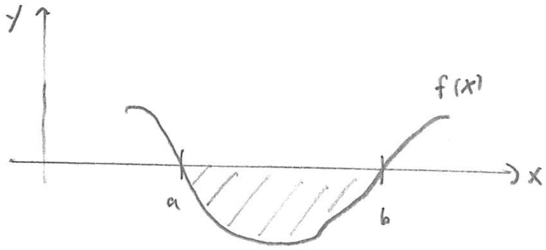
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$ (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

<u>Bew:</u> (i) Ergibt sich unmittelbar aus der Def. des Integrals.

(ii) Da f auf $[a,b]$ stetig ist, ist bekanntlich (nach Analysis I) das Bild $f([a,b])$ von $[a,b]$ bzgl. f wieder ein endliches Intervall, insbesondere nimmt f nach dem Mittelwertsatz (Satz 8, Differ. Rechnung) jeden Wert zwischen $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ und $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ an.

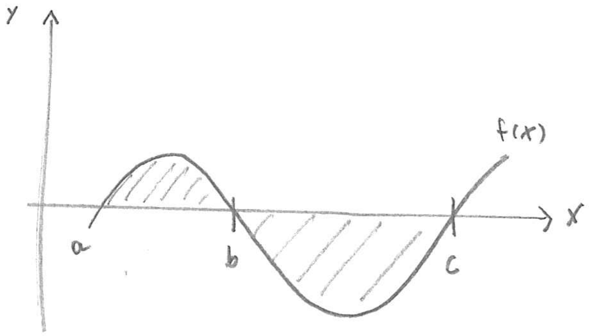
<u>Def 2</u> Für $a>b$ wird definiert $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, falls das Integral rechts ex.

Bsp



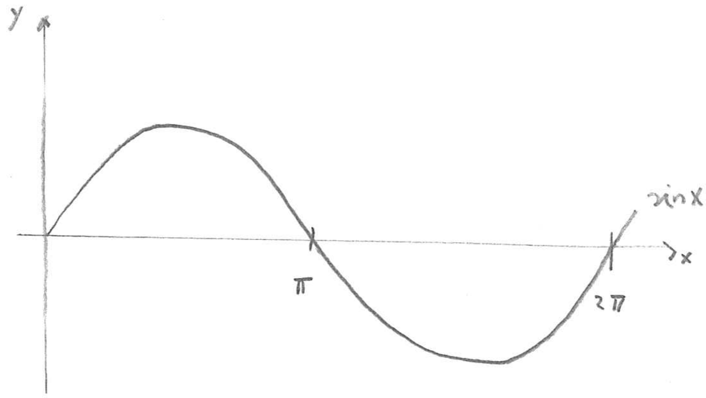
Flächeninhalt der schraffierten Fläche:

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$



Flächeninhalt der schraffierten Fläche:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$



$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

Bem 3

Sei f über $[a,b]$ integrierbar, $a \leq t \leq b$.

Dann ist f auch über $[a,t]$ integrierbar (dies folgt leicht aus der Def. von Integralen); Durch
s. Satz 3

$$F: [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{def. durch} \quad F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$$

wird eine Abbildung definiert (die Variable ist mit t bezeichnet).

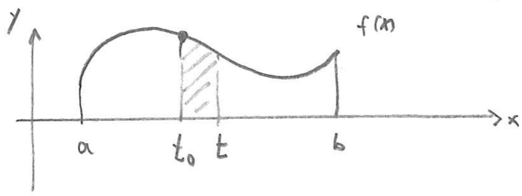
Es gilt $F(a) = 0$ und $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ [Bew. klar.]

Ferner gilt:

F ist stetig auf $[a,b]$

Bew

$$|F(t) - F(t_0)| = \left|\int_a^t f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{t_0}^t f(x)\,dx\right| \underset{\boxed{\text{Satz 5 (i)}}}{\leq} |t - t_0| \cdot \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$



anschaulich: Ist t dicht bei t_0, so ist die schraffierte Fläche klein.

Satz 6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (also auch integrierbar nach Satz 1) und $F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$.

Dann:

F ist auf $[a,b]$ differenzierbar und es gilt $F'(t) = f(t)$ f.a. $t \in [a,b]$.

Bew

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(F(t_0+h) - F(t_0)\right) \underset{\boxed{\text{nach Def. v. } F}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,dx \underset{\boxed{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung Satz 5 (ii)}}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(x_0 + h') \quad \left(\text{mit } \begin{array}{l} h' \in [t_0, t_0+h], \text{ falls } h > 0 \\ h' \in [t_0+h, t_0], \text{ falls } h < 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\boxed{\text{da } f \text{ stetig ist in } x_0}}{=} f(x_0)$$

Def 3 (Stammfunktion)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ geg. Dann:

$F: D \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, wenn gilt:

F ist differenzierbar auf D und $F'(x) = f(x)$ f.a. $x \in D$.

Bem 4

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6) besitzt jede stetige Funktion eine Stammfunktion.

Bem 5

Es existieren integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen.

z.B. ist $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x \in [-1,0] \\ 1 & x \in (0,1] \end{cases}$

über $[-1,1]$ integrierbar, f besitzt aber keine Stammfunktion

[Bew. als Übungsaufgabe]

Bem 6 Es gibt Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht integrierbar sind.

z.B sei $f: [-1,1]$ def. durch $f(x) := \begin{cases} x^2 \cos\frac{\pi}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Dann ist f auf $[-1,1]$ differenzierbar.

Also besitzt f' eine Stammfunktion, nämlich f.

Aber f' ist über $[-1,1]$ nicht integrierbar, denn für $x \to 0$ ist $f'(x)$ nicht beschränkt.

[Bew. als Übungsaufgabe]

Satz 7

(i) Sei F Stammfunktion von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch $F + c$ Stammfunktion von f (dies ist unmittelbar klar)

(ii) Seien F_1 und F_2 Stammfunktionen von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion.

Bew Aus dem Mittelwertsatz (Satz 8, Differentialrechnung) ergibt sich

$(F_1 - F_2)'(x) = 0$ f.a. $x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ konstant.

Def 4

Gegeben sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann bezeichnet $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktionen von f.

$\int f(x)dx$ heißt unbestimmtes Integral.

Ist F(x) e. Stammfunktion von f(x), so schreibt man:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ heißt dabei Integrationskonstante}).$$

Satz 8 Sei F eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (auch mit $F(x)\Big|_a^b$ bezeichnet).

Bew

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6) ist $G(t) := \int_a^t f(x)dx$ eine Stammfunktion von f.

Dann gilt offenbar $G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx - 0 = \int_a^b f(x)dx$.

Nach dem obigen Satz 7 folgt dann die Behauptung für alle Stammfunktionen von f.

Satz 9 (partielle Integration)

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar. Dann:

(i) $\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx + c$ (unbestimmtes Integral)

(ii) $\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$

Bew

(i) zu zeigen ist: $f(x) \cdot g(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.
Dies ergibt sich aus der Produktregel der Differentialrechnung (Satz 3(ii), Diff-Rechnung)
(beachte: Die Stetigkeit von f' und g' wird beim Beweis nicht gebraucht)

(ii) Da auf Grund der Voraussetzung $f'g + g'f$ stetig ist, folgt die Beh aus (i) und dem obigen Satz 8.

Satz 10 (Substitutionsregel)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar;
sei $g : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig.

(Anmerkung: Da f auf $[a,b]$ stetig ist, ist bekanntlich $f([a,b])$ wieder ein Intervall)

Dann ist $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) = g\circ f(x) \\ {[a,b]} \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f([a,b]) \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

(i) $\int g(t)\,dt = \int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx + c$ (c ist die Integrationskonstante)
(unbestimmtes Integral)
Sprechweise: Es wird $t = f(x)$ substituiert.
Die Gleichung ist so zu verstehen, daß in der Stammfunktion auf der linken Seite die Unbestimmte t durch $f(x)$ zu ersetzen ist.

(ii) $$\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt = \int_a^b g(f(x))\, f'(x)\,dx.$$
(Beachte: Für $x = a$ ist $t = f(a)$ und für $x = b$ ist $t = f(b)$)

Symbolische Schreibweise als Merkregel:

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{= f'(x)} \cdot dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt \qquad \text{(gilt analog auch für (i))}.$$

Beweis

Sei G Stammfunktion von g, also $G' = g$ (beachte: G ex. nach Bem 4, da g nach Vor.) Dann:

(i) $$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx \underset{\boxed{G' = g}}{=} \int \overbrace{G'(f(x)) \cdot f'(x)}^{\text{stetig}}\,dx \underset{\boxed{\substack{\text{Kettenregel, Satz 14 der Diff. R.} \\ \text{beachte: } f \text{ differenzierbar}}}}{=} G(f(x)) = G(t) \underset{\boxed{\substack{\text{da } G \text{ Stammfkt} \\ \text{von } g}}}{=} \int g(t)\,dt + c$$

(beachte: Die Stetigkeit von f' wird beim Beweis nicht benötigt)

(ii) $$\int_a^b g(f(x))\, f'(x)\,dx \underset{\boxed{\substack{\text{(i), beachte} \\ g(f(x)) \cdot f'(x) \text{ ist} \\ \text{stetig, Satz 8}}}}{=} G(f(x))\Big|_a^b = G(f(b)) - G(f(a)) \underset{\boxed{\substack{G \text{ ist Stammfkt. von } g \\ \text{und } g \text{ ist stetig}}}}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt$$

Bsp 3 (Substitutionsregel und partielle Integration)

(i) (unbestimmtes Integral)

$$\int x(x-3)^{25}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int (t+3)\,t^{25}\,dt = \int (t^{26}+3t^{25})\,dt = \frac{t^{27}}{27} + 3\cdot\frac{t^{26}}{26} \underset{\uparrow}{=} \frac{(x-3)^{27}}{27} + 3\,\frac{(x-3)^{26}}{26} + c$$

$\boxed{\text{Subst. } t = x-3;\ \frac{dt}{dx} = 1;\ \text{also } dt = dx}$ $\qquad$ $\boxed{t = x+3}$

Natürlich kann das Integral auch ohne Substitution berechnet werden, indem $x(x-3)^{25}$ ausmultipliziert wird; allerdings ist dies umständlich.

(ii)

$$\int_1^2 (x^2-1)^4\, 2x\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^3 t^4 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2x}\,dt = \frac{t^5}{5}\Bigg|_0^3 = \frac{3^5}{5} - 0 = \frac{3^5}{5}.$$

$\boxed{\text{Subst. } t = x^2-1;\ \frac{dt}{dx} = 2x,\ dx = \frac{dt}{2x};\ \text{für } x=1 \text{ ist } t=0,\ \text{für } x=2 \text{ ist } t=3}$

Zur Berechnung des Integrals wird nicht zurück substituiert, sondern es werden die neuen Grenzen berechnet

(iii)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}^{\cos t}\ \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{\cos t}\cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Subst. } x = \sin t;\ \frac{dx}{dt} = \cos t;\ \text{für } x=0 \text{ ist } t=0,\ \text{für } x=1 \text{ ist } t=\frac{\pi}{2}}$ $\qquad$ $\boxed{\text{Siehe (iv)}}$

Anmerkung: Hier wird (im Unterschied zu den Beispielen (i) und (ii)) x durch eine Fkt mit der Variablen t ersetzt u. nicht eine Fkt von x durch t. Man könnte auch $t = \arcsin x$ substituieren.

(iv)

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'}\,dx = \cos x\cdot\sin x - \underbrace{\int(-\sin x)\sin x\,dx}_{\int(\cos^2 x - 1)\,dx \ (\text{beachte: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1)}$$

$f' = -\sin x;\ g = \sin x$

also $\quad 2\int \cos^2 x\,dx = \cos x \sin x + \int 1\,dx$

also $\quad \int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{2} + c$

(v)

$$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{e^x}_{g}\,dx = x\cdot e^x - e^x + c$$

$f' = 1;\ g = e^x$

Bem 7 (Beispiele wichtiger Stammfunktionen)

(1) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, falls $\alpha \neq -1$. (klar)

(2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ [klar für positive x. Für negative x gilt: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' \underset{\boxed{\text{Kettenregel}}}{=} -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$]

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $0 \notin [a,b]$. Dann:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|b| - \ln|a|.$$

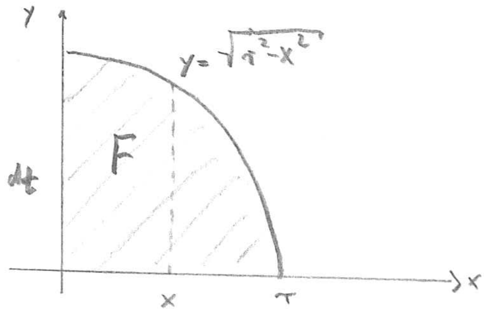
(3) $\int e^x\,dx = e^x + c$; $\int \cos x\,dx = \sin x + c$; $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ (klar)

(4) $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$ (s. Bsp(e) für Ableitungen in Bem 1 der Differ.-Rechnung)

(5) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c$ für $[a,b] \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (verwende zum Bew. die Kettenregel)

(6) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$
[klar nach (2) und der Kettenregel].

Bem 8 (Flächeninhalt eines Kreises)



$$F = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \underset{\boxed{\text{Subst. } x = rt,\ \frac{dx}{dt} = r}}{=} \int_0^1 \sqrt{r^2 - r^2 t^2}\,\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{r}\,dt$$

$$= r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt \underset{\boxed{\text{s. obiges Bsp 3 (iii)}}}{=} r^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

Bem 9 Ein Integral der Form $\int \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\,dx$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$

läßt sich i.a. nicht mit Hilfe "elementarer" Funktionen ausdrücken (Elliptisches Integral). Das Integral tritt auf bei der Berechnung der Bogenlänge von Ellipsen, aber auch bei vielen anderen Anwendungen.

Bem 10 (Integration durch Partialbruchzerlegung)

Sei $g(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$; $a_n \neq 0$ ein Polynom vom Grad n.
Sei $f(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$; $b_m \neq 0$ ein Polynom vom Grad m.
Dann läßt sich stets eine Stammfunktion von $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ bestimmen mit Hilfe der sog. Partialbruchzerlegung (spezielle Bsp: s. Übungen)

Integration von Funktionenfolgen

Satz 11

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mit dem Konvergenzradius r und der Grenzfunktion $f(x)$.

Bekanntlich ist $f:(x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$ stetig, also auch integrierbar.

Dann gilt:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{für } x \in (x_0-r, x_0+r) \quad (c \text{ Integrationskonstante})$$

(Potenzreihen dürfen also gliedweise integriert werden)

Bew: Bekanntlich dürfen Potenzreihen gliedweise differenziert werden;

also ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ e. Stammfkt von $f(x)$.

Bsp 4

Es gilt $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ für $|x|<1$ (geometrische Reihe)

Integration liefert für $|x|<1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Die Gleichung gilt auch für $x = 1$ (ohne Bew; nach dem abelschen Grenzwertsatz: Da die Reihe für $x=1$ konv., ist die Grenzfunktion an der Stelle $x=1$ linksseitig stetig.)

Also gilt: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe)

Uneigentliche Integrale

Def 5

i) Sei $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ auf $[a,t]$ integrierbar für alle $t \geq a$.

Betrachte den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$

Ex. dieser Grenzwert, so wird er mit $\int_a^{\infty} f(x)dx$ bezeichnet (uneigentliches Integral).

(Analog für $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$) ; analog $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx + \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$, falls die Grenzwerte ex.

ii) Sei $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ integrierb. auf $[a,t]$ für alle t mit $a \leq t < b$.

Betrachte den Grenzwert $\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$

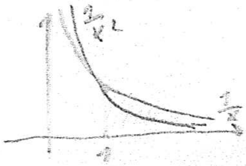
Ex. dieser Grenzwert, so wird er mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet (uneigentliches Integral)

(analog für $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ und für $f:(a,b) \to \mathbb{R}$)

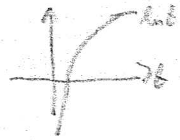
Bsp 5 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \ln x \Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \underbrace{\ln 1}_{0}) = \infty$ (das uneigentliche Integral ex. nicht)

Bsp 6 Sei $s \neq 1$. Dann

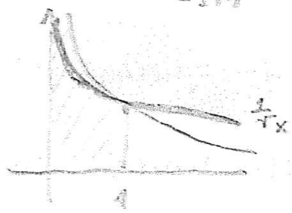
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^s}dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1}\right) = \begin{cases} \infty & \text{falls } s<1 \quad (\text{das Integral ex. nicht}) \\ -\frac{1}{-s+1} & s>1 \quad (\text{das Integral ex.}) \end{cases}$$



Bsp 7 $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0} \ln x \Big|_t^1 = \lim_{t\to 0} \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln t = \infty$



Bsp 8 $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{für } s \geq 1 \\ \frac{1}{-s+1} & s < 1 \end{cases}$ (Integral existiert) (Integral ex.)



Satz 11 (Majoranten-Krit. u. Minoranten-Krit. für uneigentliche Integrale)
$f: [0,t]$ integr. f.a. $t>0$

(i) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ex., falls reelle Z. c, K ex. mit $c>1$, so daß gilt $|f(x)| \leq \frac{K}{x^c}$ für $x \in [a,\infty)$
(bzw. $x \in [b,\infty)$ für ein $b \geq a$).

(ii) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ex. nicht, falls reelle Z. c, K ex. mit $\underset{K>0}{0 \leq c \leq 1}$, so daß gilt: $|f(x)| \geq \frac{K}{x^c}$ f. $x \in [a,\infty)$
(bzw. $x \in [b,\infty)$ für ein $b \geq a$)

(Bew. mit Hilfe von Bsp 7)

Bsp 9
(i) $\int_1^\infty x e^{-(x^3)}\,dx$ ex., da $\frac{x}{e^{x^3}} \leq \frac{1}{x^2}$ für hinreichend gr. x, wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{3x^2 e^{x^3}} = 0$ $\boxed{\text{l'Hospital}}$

(ii) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ ex., da $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ für hinreichend gr. x, wegen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} = 0 \quad \text{(l'Hospital)}$$

Analog ex. auch $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

ex. Wert des Integrals ist 1
(Gaußsche Glockenkurve)

(Stochastik)

(iii) $\int_1^\infty x e^{-x^2}\,dx$ ex. wende wieder l'Hospital an.

Berechne den Wert des uneigentlichen Integrals:

$$\int x e^{-x^2}\,dx \underset{\substack{\text{Subst. } t = x^2 \\ \frac{dt}{dx} = 2x}}{=} \int \frac{1}{2}\frac{dt}{dx} e^{-t}\,dx = \int \frac{1}{2} e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2} e^{-t} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$\int_1^\infty x e^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \Big(\underbrace{-\frac{1}{2} e^{-t^2}}_{\to 0} + \frac{1}{2} e^{-1}\Big) = \frac{1}{2e}$$

Satz 12 (Integralkriterium für unendliche Reihen)

Es sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f : [m, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und $f(x) \geq 0$ f.a. $x \in [m, \infty)$.

Dann:

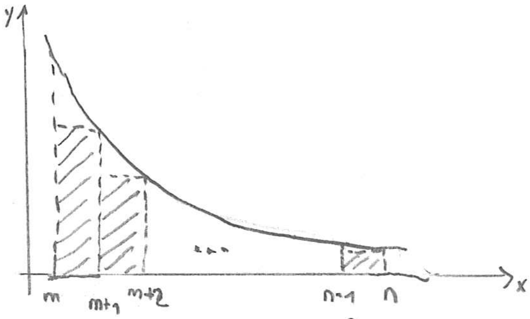
(i) $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ existiert.

(ii) Für $n > m$ gilt:

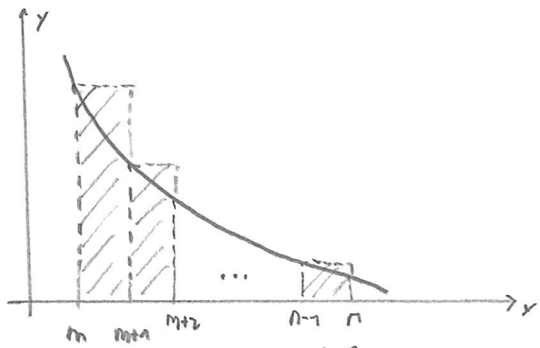
$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_m^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(x)$$

Bew (i) folgt aus (ii)

(ii)



Die schraffierte Fläche ist $\sum_{k=m+1}^{n} f(k)$



Die schraffierte Fläche ist $\sum_{k=m}^{n-1} f(k)$.

Bsp 10

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ ex. $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$ $\quad$ [beachte $\int \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln \ln x & \\ \frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha} & \text{falls } \alpha \neq 1 \end{cases}$]

Bem 12 (Die Partialsumme der harmonischen Reihe)

Nach dem obigen Satz (ii) gilt

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} + \ln n \underset{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \underset{(ii)}{\leq} 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n,$$

also

$$\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \leq 1$$

Ferner ist $\quad 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ auch monoton fallend.

Dies zeigt eine geometrische Überlegung analog zum Beweis von Satz 12 (ii).

Also existiert der Grenzwert $C := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \approx 0{,}577\ldots$

(Euler-Mascheroni-Konstante)

Taylorreihen

$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots$

Bem 13 Sei $f(x)$ Grenzfkt e. Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius r.
Dann ist $f(x)$ beliebig oft differenzierbar (die Ableitung ergibt sich durch gliedweises differenzieren u. der Konvergenzradius bleibt r ~~erhalten~~) (Folgerung 2 der Differentialrechnung)
Ferner ist $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ~~[illegible]~~, was leicht nachzurechnen ist.
Also ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Satz 13 Sei $x_0 \in [a,b]$ u. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar.
Stelle f dar in der Form

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{m\text{-tes Taylorpolynom von } f \text{ an der Stelle } x_0} + \overbrace{R_{m+1}(x)}^{\text{Restglied}}$$

Dann: Für jedes $x \in [a,b]$ ex. e. $\vartheta \in [0,1]$ mit $R_{m+1}(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$
(Restglieddarstellung von Lagrange) (Für $m=0$ ist dies der Mittelwertsatz)

$x \le x_0+\vartheta(x-x_0) \le x_0$, falls $x < x_0$
$x_0 \le x_0+\vartheta(x-x_0) \le x$ falls $x_0 < x$

Bem 14 Ist f in S 13 beliebig oft differenzierbar, so heißt
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ Taylorreihe von } f \text{ um } x_0.$$
Die Taylorreihe muß nicht notwendig gegen $f(x)$ konvergieren;
Die Taylorreihe konvergiert gegen $f(x)$ gdw das Restglied gegen 0 konvergiert;
dies ist sicher der Fall wenn die Ableitungen von f beschränkt sind (nach Bem [illegible]
(beachte $\lim_{m\to\infty} \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} = 0$)).

Bem 15 E. Potenzreihe ist gleichzeitig die Taylorreihe ihrer Grenzfunktion (nach Bem 13)

Bem 16 Für $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 1$; die Taylorreihe an der Stelle 0 ist also identisch 0.

S 14 Für $n \geq 2$ sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal differ., sei $x_0 \in (a,b)$.
Gelte $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
Dann
(i) n gerade: f hat bei x_0 lokalen Extremwert und zwar lokales Max, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$
" Min, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$
(ii) n ungerade: f hat bei x_0 kein lokalen Extremwert.

Bew mit Hilfe von Satz 13

Bsp 11 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ u. $n \in \mathbb{N}$ sei $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $\binom{\alpha}{0} := 1$ (Binomialkoeff.)
Für $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq n$ ist dies der übliche Binomialkoeff.
Für $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha < n$ ist $\binom{\alpha}{n} = 0$, da eine der Faktoren im Zähler von $\binom{\alpha}{n}$ Null ist.
Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ (Für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist dies gerade die binomische Formel)
offenbar ist die Reihe die Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$,
~~Bew~~ ergibt sich aus einer entsprechenden Restgliedabschätzung

Anwendung $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8-3} = \underbrace{\sqrt[3]{8}}_{=2}\sqrt[3]{1-\frac{3}{8}} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n}\left(-\frac{3}{8}\right)^n$

Mehrdimensionale Analysis

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Die Elemente aus $\mathbb{R}^n$ besitzen die Form $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Das Hauptziel dieses Abschnitts besteht darin, eine Differentialrechnung für Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu entwickeln; also für Funktionen in 2 Variablen.

(1) Der Betrag im $\mathbb{R}^n$

Um Analysis im $\mathbb{R}^n$ betreiben zu können, wird eine Abstandsmessung für die Elemente im $\mathbb{R}^n$ benötigt.

Sei $x := (x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und $y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dann wird definiert

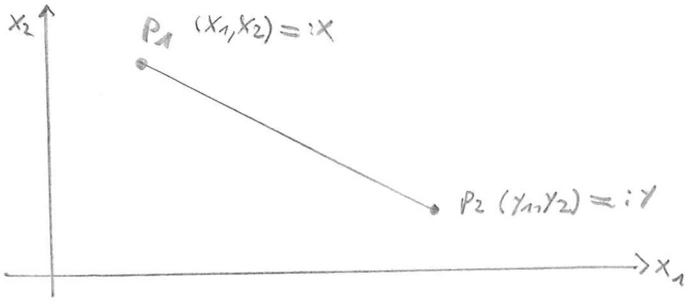
$$\|x - y\| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

($\|x - y\|$ heißt Norm von $x - y$, oder Betrag von $x - y$.)

Man beachte $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$.

Im Fall $n = 1$ gilt $\|x\| = |x|$.
Speziell gilt $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Im Fall $n = 2$ ergibt sich die folgende Skizze, wenn die Elemente des $\mathbb{R}^2$ als Punkte in der Ebene interpretiert werden:



$\|x - y\|$ = Abstand der Punkte P_1 und P_2 in der Ebene.

Analog gilt im $\mathbb{R}^3$:

$\|x - y\|$ = Abstand der zu x und y gehörigen Punkte im Raum.

Speziell ist $\|x\|$ der Abstand des zu x gehörigen Punktes zum Nullpunkt.

Für die Analysis sind folgende Eigenschaften der Norm im $\mathbb{R}^n$ grundlegend:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = (0, \ldots, 0)$ [Bew klar]

(ii) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\lambda \in \mathbb{R}$;
also $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
Dann gilt $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. [Bew. klar]

(iii) (Δ-Ungleichung)
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$
Beweis mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz aus der linearen Algebra.

Sei $\varepsilon > 0$; $x \in \mathbb{R}^n$. Dann wird def. (analog wie in $\mathbb{R}$)
$$U_\varepsilon(x) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon \}.$$

(2) Grenzwert im $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^m$

(i) Grenzwert einer Folge

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_n \in \mathbb{R}^m$;

sei $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{mn})$.

Sei $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m$.

Dann wird definiert:
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x :\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Für $m = 1$ ist dies der übliche Grenzwert einer Folge.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Grenzwertbildung komponentenweise durchgeführt werden kann; d.h. es gilt:
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \iff \lim_{n \to \infty} (x_{in}) = x_i \text{ für } i = 1, \ldots, m.$$

(ii) Grenzwert einer Abbildung

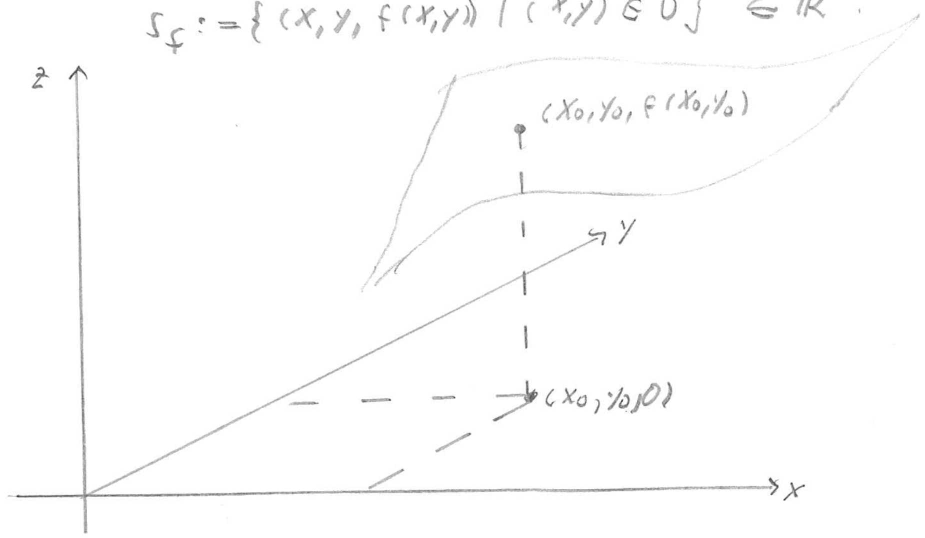
Sei $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}$. Dann wird (analog zum Grenzwert einer Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) def.:
$$\lim_{x \to a} f(x) = b :\iff$$
Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Elementen $x_n \in \mathbb{R}^m$ und $x_n \neq a$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b.$$

(3) Die Anschauung im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten im folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dann läßt sich f veranschaulichen durch die Punktmenge

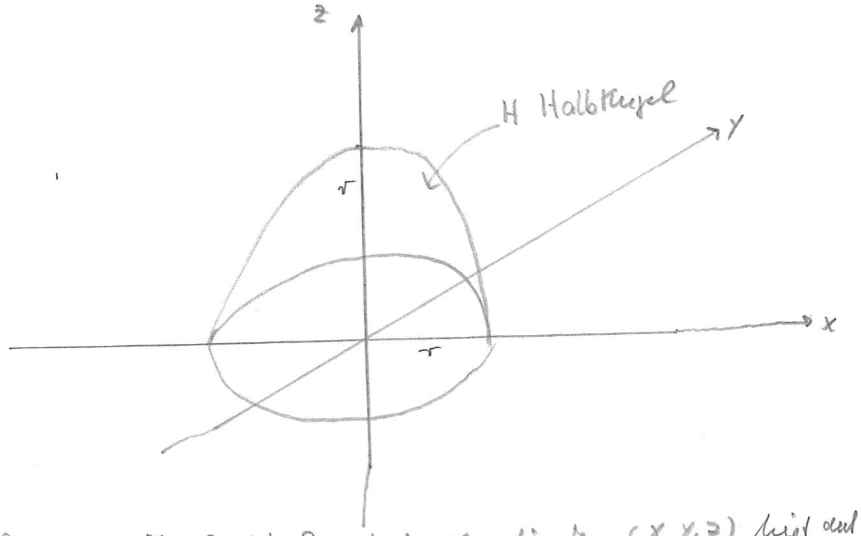
$$S_f := \{ (x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D \} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$



S_f läßt sich vorstellen als "Fläche" im $\mathbb{R}^3$ (fliegender Teppich).

<u>Bsp 1</u> Sei $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ geg. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch

$$f(x,y) := \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \leq r \\ 0 & \phantom{\text{falls }} x^2 + y^2 > r \end{cases}$$



Beachte: Ein Punkt P mit den Koordinaten (x, y, z) liegt auf der Kugel vom Radius r mit dem Mittelpunkt $(0,0,0)$ gdw gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 .$$

(4) Stetigkeit

Sei $D \in \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $(x_0, y_0) \in D$.

Dann wird definiert (analog zu Abbildungen einer Variablen)

f stetig im Punkt (x_0, y_0) $:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x,y) \in D : (\|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - f(x_0,y_0)\| < \varepsilon$

Sei $(x_0, y_0) \in D$ Häufungspunkt von D; d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ ex. ∞ viele $(x,y) \in D$ mit $(x,y) \in U_\varepsilon(x_0, y_0)$.

Dann gilt (Folgenstetigkeit) (analog zu Abbildungen einer Variablen)

f stetig in $(x_0, y_0) \Longleftrightarrow$

Für jede Folge $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$.

<u>Bem 1</u> (analog zu Abbildungen einer Variablen)

Polynomfunktionen sind stetig;

Summe, Produkt, Differenz, Quotient, Hintereinanderschaltung stetiger Abbildungen sind stetig.

(ohne Bew)

<u>Bsp 1</u>

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sei $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Dann ist f in (x_0, y_0) stetig nach der obigen Bemerkung.

Aber: f ist nicht stetig in $(0,0)$.

Dies ergibt sich wie folgt (verwende die Aussage über die Folgenstetigkeit):

Es gilt $f(0,0)=0$.

Betrachte die Folge $\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)=(0,0)$

Ferner gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$.

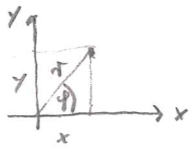
Anmerkung:
Die Folge $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist geeignet gewählt;
die Folge $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ führt nicht zum Ziel.

Bsp3

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ def. durch $f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{falls } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Dann ist f stetig in $(0,0)$.
Dies ergibt sich wie folgt:

Setze $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$ (Polarkoordinaten) $(r\geq 0)$



Dann gilt $\|(x,y)\|=r$ und

$$\|f(x,y)\|=\left|\frac{r^3\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2}\right|=|r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi|\leq r \quad (*)$$

Ferner gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=r}=0$,

also auch wegen $(*)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

(5) partielle Ableitungen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben ; $(x_0, y_0) \in D$

Ziel: Untersuche das Änderungsverhalten von f in einer ε-Umgebung von (x_0, y_0) parallel zur x-Achse bzw. y-Achse.

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0)}{h},$$

so wird dieser mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oder $f'_x(x_0, y_0)$ bezeichnet.

Bei der Bildung von $f'_x(x_0, y_0)$ wird y_0 also als Konstante betrachtet.

$f'_x(x_0, y_0)$ heißt partielle Ableitung von f nach x im Punkt (x_0, y_0)

$f'_x(x_0, y_0)$ beschreibt das Änderungsverhalten von f in $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ parallel zur x-Achse.

Analog wird die partielle Ableitung von f nach y im Punkt (x_0, y_0) definiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$ (bezeichnet mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ oder $f'_y(x_0, y_0)$).

$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) := (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ heißt Gradient von f an der Stelle (x_0, y_0)

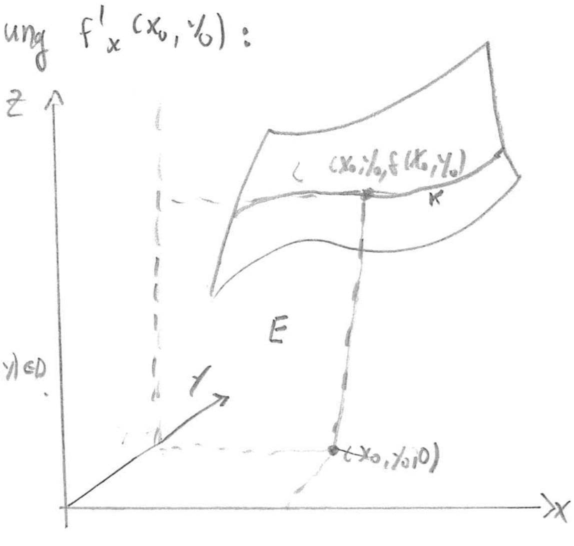
Anschauliche Deutung der partiellen Ableitung $f'_x(x_0, y_0)$:

Es sei E die Ebene durch $(x_0, y_0, 0)$ und $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ parallel zur x-Achse.

Schneide die zu f gehörige Fläche $S_f := \{(x, y, f(x,y)) \mid (x, y) \in D\}$ mit E.

Man erhält eine Kurve $K := \{(x, y_0, f(x, y_0)) \mid (x, y) \in D\}$ in der Ebene E.

Dann ist $f'_x(x_0, y_0)$ der Anstieg der Tangente an die Kurve K im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Bsp 4

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x,y) := x^2 + xy^2$.

Dann ist $f'_x = 2x + y^2$ (Es wird nach x differenziert, dabei wird y als Konstante aufgefaßt),

und $f'_y = 2xy$ (Es wird nach y differenziert, dabei wird x als Konstante aufgefaßt.

Also ist grad $f = (2x + y^2, 2xy)$.

Bsp 5

Betrachte die Abb. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ aus Bsp 1.

Dann ist

$$f'_x(x_0,0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$f'_y(0,y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(0,y_0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Speziell existieren die partiellen Ableitungen $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$.

Nach Bsp 1 ist f aber an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig.

Ergänzung:
Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_x\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \infty$ (leicht nachzurechnen);

also ist f'_x in $(0,0)$ nicht stetig.

(6) Richtungsableitungen

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a := (a_1, a_2) \neq (0,0)$.

Ziel: Untersuche das Änderungsverhalten von f in einer Umgebung von (x_0, y_0) parallel zum Vektor (a_1, a_2) in der (x,y)-Ebene.

Existiert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + a_1 h, y_0 + a_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}$, so wird der Grenzwert mit $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0, y_0)$ bezeichnet und $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0, y_0)$ heißt dann Richtungsableitung von f nach a an der Stelle (x_0, y_0)

Speziell ist die partielle Ableitung $f'_x(x_0, y_0)$ gerade die Richtungsableitung von f nach $(1,0)$ an der Stelle (x_0, y_0)

Bsp 5

Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

aus Bsp 2 und Beispiel 5.

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(a_1, a_2)}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 \cdot h, a_2 \cdot h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 a_1^2 a_2}{(h^4 a_1^4 + h^2 a_2^2) h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a_1^2 a_2}{h^2 a_1^4 + a_2^2} = \begin{cases} \frac{a_1^2}{a_2} & \text{falls } a_2 \neq 0 \\ 0 & a_2 = 0 \end{cases}$$

Also: f ist in $(0,0)$ nicht stetig (Bsp 5), aber in jede Richtung differenzierbar.

Bem 2

Existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial(a_1, a_2)}(x_0, y_0)$, so ex. für $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ auch die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial(ca_1, ca_2)}(x_0, y_0)$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(ca_1, ca_2)}(x_0, y_0) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial(a_1, a_2)}(x_0, y_0).$$

Bew

$$\frac{\partial f}{\partial(ca_1, ca_2)}(x_0, y_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hca_1, y_0 + hca_2) - f(x_0, y_0)}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hca_1, y_0 + hca_2) - f(x_0, y_0)}{c \cdot h}$$

$$= c \cdot \lim_{ch \to 0} \frac{f(x_0 + hca_1, y_0 + hca_2) - f(x_0, y_0)}{c \cdot h} = c \cdot \frac{\partial f}{\partial(a_1, a_2)}(x_0, y_0).$$

beachte: $h \to 0$ ist gleichwertig mit $c \cdot h \to 0$

Anschauliche Deutung der Richtungsableitung:

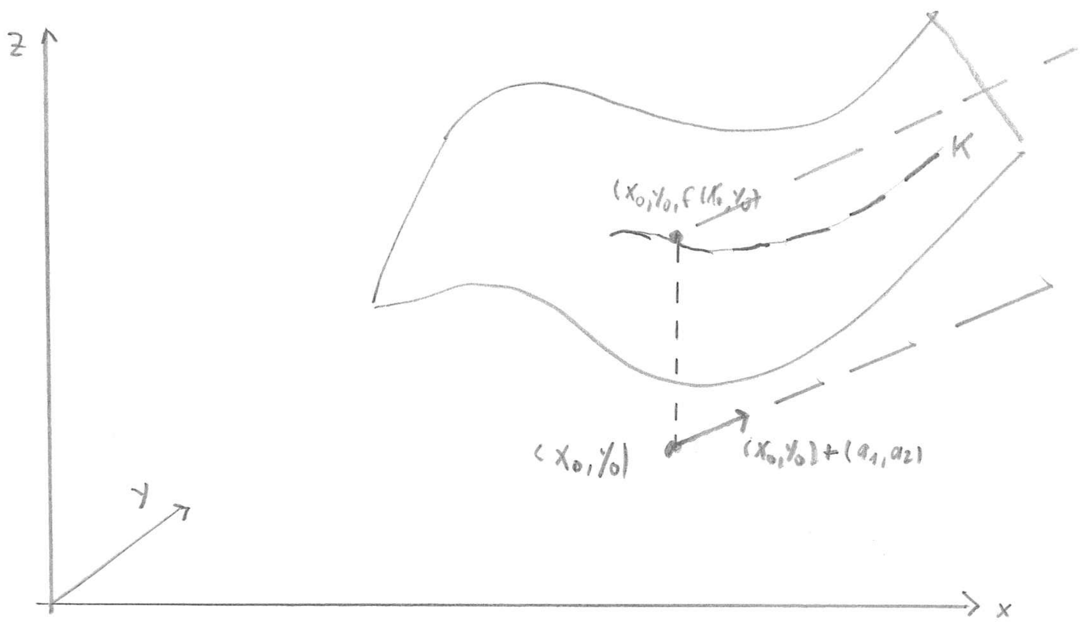
Es sei die Ebene E durch $(x_0, y_0, 0)$ und $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ parall zum Vektor (a_1, a_2) in der (x,y)-Ebene gegeben.

Schneide die zu f gehörige "Fläche" $S_f := \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ mit E. Dann erhält man eine "Kurve" K.

Sei $a = (a_1, a_2)$ normiert, also $\|a\| = 1$.

Dann ist

$\frac{\partial f}{\partial (a_1, a_2)}(x_0, y_0)$ der Anstieg der Tangente an die "Kurve" K im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



(7) Differenzierbarkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: D \to \mathbb{R}$ gegeben.

Bei der Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) wird das Änderungsverhalten von f im Punkt (x_0, y_0) lediglich in einer bestimmten Richtung berücksichtigt und nicht in einer ganzen Umgebung $U_\varepsilon(x_0, y_0)$.
Um dies zu erreichen wird der Begriff der Differenzierbarkeit eingeführt.

Dazu orientieren wir uns am Fall einer Variablen:

Gegeben sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Dann gilt (nach dem Satz über die lineare Approximierbarkeit der Diff. Rechn.)

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$\Leftrightarrow$

f läßt sich (in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$) darstellen in der Form

$$f(x_0+h) = f(x_0) + c \cdot h + h \cdot r(x) \text{ mit } \lim_{h \to 0} r(h) = 0$$

für eine geeignete Konstante c
Also wird f im Punkt x_0 approximiert durch eine Gerade (Tangente) mit der Steigung $f'(x_0)$ durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$,

die Geradengleichung lautet also

$$y = f'(x_0) \cdot x + c \quad \text{mit} \quad f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + c$$

oder $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ist f differenzierbar, so ist $c = f'(x_0)$

<u>Def 1</u> Gegeben sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

f differenzierbar in (x_0, y_0) $:\Longleftrightarrow$

f läßt sich (in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0, y_0)$) darstellen in der Form

(*) $f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + c_1 h_1 + c_2 h_2 + \|(h_1,h_2)\| \, r(h_1,h_2)$

für geeignete c_1 und c_2 mit $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} r(h_1, h_2) = 0$

<u>Bem 3</u> Ist f in (x_0, y_0) differenzierbar, so existieren die partiellen Ableitungen $f'_x(x_0,y_0)$ und $f'_y(x_0,y_0)$ und es gilt $c_1 = f'_x(x_0,y_0)$ und $c_2 = f'_y(x_0,y_0)$.

<u>Bem 4</u> Setzt man $(x,y) := (x_0+h_1, y_0+h_2)$, so bekommt (*) die Form

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + c_1(x-x_0) + c_2(y-y_0) + \underbrace{\|(x-x_0, y-y_0)\| \cdot r(x-x_0, y-y_0)}_{\text{Restfunktion}}.$$

mit $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} r(x-x_0, y-y_0) = 0$.

Läßt man die "Restfunktion" weg, so erhält man eine Approximation von f im Punkt (x_0,y_0) durch die Gleichung

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x-x_0)(x-x_0) + f'_y(x-x_0)(y-y_0).$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene E durch den Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ (Tangentialebene von f im Punkt (x_0,y_0)).

E läßt sich auch beschreiben durch

$$z = f'_x(x_0,y_0)\,x + f'_y(x_0,y_0)\,y + c,$$

wobei die Konstante c berechnet werden kann mittels der Gleichung

$$f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot x_0 + f'_y(x_0,y_0)\,y_0 + c.$$

<u>Bem 5</u> Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in (x_0,y_0) differenzierbar, so ist f in (x_0,y_0) stetig. Dies folgt direkt aus der Def. 1 der Differenzierbarkeit und der Folgenstetigkeit.

Bem 6 [ohne Bew]

Existieren die partiellen Ableitungen f'_x und f'_y in einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0,y_0)$ und sind f'_x und f'_y in $U_\varepsilon(x_0,y_0)$ stetig, so ist f in (x_0,y_0) differenzierbar.

Bem 7 Ist f in (x_0,y_0) differenzierbar, so ist f im Punkt (ohne Bew) (x_0,y_0) in jede Richtung (a_1,a_2) differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(a_1,a_2)}(x_0,y_0) = a_1 \cdot f'_x(x_0,y_0) + a_2 \cdot f'_y(x_0,y_0).$$

Bem 8

Die in der Gleichung (*) der obigen Definition auftretende Summe $c_1h_1 + c_2h_2$ läßt sich auch als Skalarprodukt

$$(c_1,c_2)\cdot(h_1,h_2)$$

schreiben und auch als Produkt einer einzeiligen Matrix mit einem Spaltenvektor in der Form

$$(c_1,c_2)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Bem 9 (Verallgemeinerung der Def. der Differenzierbarkeit)

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ geg. durch

$$f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$; dabei sind die $f_1,\dots,f_m$ Abb. von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

$f_1,\dots,f_m$ heißen die zu f gehörigen Koordinatenfunktionen.

Dann:

f in $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ differenzierbar $:\Longleftrightarrow$

$f_1,\dots,f_m$ in ξ differenzierbar $\Longleftrightarrow$

Ex. e. Matrix $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$ u. e. Abb. $r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

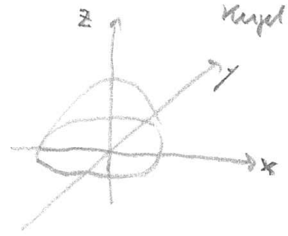
so daß in einer Umgebung $U_\varepsilon(\xi)$ gilt:

$$f(\xi+h) = f(\xi) + C\cdot h^T + \|h\|\cdot r(h) \text{ mit } \lim_{h\to 0} r(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$ (h^T ist der dazugehörige Spaltenvektor)

Ist f in ξ differenzierbar, so ist $C = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial (x_n)}(\xi) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial (x_n)}(\xi) \end{pmatrix}$

Die affine Abbildung $\xi + h \longmapsto f(\xi) + C\cdot h$ ist dann e. Approx. von f in ξ.

Bsp 7 (Tangentialebene)



Kugel vom Radius r

$r^2 = x^2+y^2+z^2$

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{r^2-x^2-y^2} & \text{falls } x^2+y^2 \leq r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x^2+y^2 < r$ gilt:

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \quad , \quad f'_y = \frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

Tangentialebene E im Pkt $(0,0)$ [ex. nach Bem 4] : $E: z = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + c$

$c_1 = f'_x(0,0) = 0$; $c_2 = f'_y(0,0) = 0$

$E: z = c$, wobei $\underbrace{f(0,0)}_{r} = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c$; also $c = r$

Also: $E: z = r$ (anschaulich klar! E parallel zur (x,y)-Ebene)

Tangentialebene E im Pkt $(\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$: $E: z = f'_x(\frac{r}{2},\frac{r}{2})x + f'_y(\frac{r}{2},\frac{r}{2})y + c$

$$c_1 = f'_x(\tfrac{r}{2},\tfrac{r}{2}) = \frac{-\frac{r}{2}}{\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}-\frac{r^2}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad c_2 = f'_y(\tfrac{r}{2},\tfrac{r}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E: \ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + c, \text{ wobei } \underbrace{f(\tfrac{r}{2},\tfrac{r}{2})}_{=\frac{r}{\sqrt{2}}} = \underbrace{\underbrace{c_1}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{r}{2} + \underbrace{c_2}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{r}{2}}_{-\frac{r}{\sqrt{2}}} + c, \text{ also } c = \sqrt{2}\,r$$

Also: $E: \ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \sqrt{2}\,r$

Die partielle Ableitung $f'_x(r,0)$ ex. nicht:

linksseitige Ableitung: $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(r+h,0)-f(r,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\sqrt{-2hr-h^2}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \underbrace{\frac{\sqrt{-h}}{h}}_{=-\frac{1}{\sqrt{|h|}}}\sqrt{2r+h} = -\infty \quad \left(\begin{matrix}\text{anschaulich}\\ \text{klar}\end{matrix}\right)$$

rechtsseitige Ableitung: $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(r+h,0)-f(r,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Bsp 8 Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x,y) = x^2 + x\cos y$. Dann:

$f'_x = 2x + \cos y$, $f_y = -x \sin y$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x+\cos y, -x\sin y)$

f'_x u. f'_y sind in $\mathbb{R}^2$ stetig.

Also ist f auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Richtungsableitung: $\frac{\partial f}{\partial(a_1,a_2)}(x_0,y_0) = a_1(2x_0 + \cos y) - a_2 x_0 \sin y_0$ (nach Bem 7)

Tangentialebene im Pkt $(0,0)$:

$f'_x(0,0) = 1$, $f'_y(0,0) = 0$

$E: z = \underbrace{f'_x(0,0)}_{=1} \cdot x + \underbrace{f'_y(0,0)}_{=0} y + c$; $\underbrace{f(0,0)}_{0} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + c$; also $c = 0$

$E: z = x$

Tangentialebene im Pkt $(1,0)$ $f'_x(1,0) = 3$; $f'_y(1,0) = 0$; $z = 3x + 0y + c$; $f(1,0) = 2$, $2 = 3 + c$, $c = -1$

oder $z = 3(x-1) + 0(y-0)$

Relative Extrema

Def 12 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ fkt., sei x innerer Pkt von D (d.h. es ex. ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq D$).

x lokales Max. von f :$\Leftrightarrow$ Ex. e. ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$, so daß gilt: $f(x) \geq f(y)$ f.a. $y \in U_\varepsilon(x)$

x isoliertes lokales Max von f :$\Leftrightarrow$ " $f(x) > f(y)$ f.a. $y \in U_\varepsilon(x)$, $y \neq x$.

x lokales Min ; x isoliertes lokales Min : analog

x Extremum von f :$\Leftrightarrow$ x lokales Min oder x lokales Max von f ; isoliertes Extremum analog.

Bem 10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema):

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$, x innerer Punkt von D; $x = (a,b)$

Ex. die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)$, so gilt:

x lokales Extremum von $f \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)\right) = (0,0)$. (Gradient von f an der Stelle (a,b))

Bew (analog zu Abb $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Bem 11 (hinreichende Bed. für isolierte Extrema)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x = (a,b)$ innerer Pkt. von D.

Sei f in $U_\varepsilon(x)$ 2-mal stetig diff. für ein $\varepsilon > 0$. (gemeint sind die partiellen Ableitungen)

Sei $\operatorname{Hess} f(a,b) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a,b) & f_{x_1x_2}(a,b) \\ f_{x_2x_1}(a,b) & f_{x_2x_2}(a,b) \end{pmatrix}$ (Hesse Matrix von f an der Stelle $x = (a,b)$)

$f_{x_i x_j}(a,b) := \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a,b)$.

Sei $g(x) := \det\left(\operatorname{Hess} f(a,b) - x \cdot \underbrace{E}_{\text{Einheitsmatrix}}\right)$ das charakteristische P. von $\operatorname{Hess} f(a,b)$.

$\operatorname{Hess} f(a,b)$ ist stets eine symmetrische Matrix (ohne Bew)

Also besitzt $g(x)$ stets zwei reelle NSt (nicht notwendig verschieden) α_1, α_2.

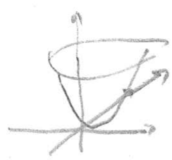
Dann (ohne Bew)

(i) $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow f$ hat in $x = (a,b)$ e. isol. Min.

(ii) $\alpha_1, \alpha_2 < 0 \Rightarrow$ " Max

(iii) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0 \Rightarrow f$ hat in $x = (a,b)$ kein lokales Extremum

Bsp 9 Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x,y) = x^2 + y^2$



$\operatorname{grad} f(x) = (2x, 2y)$; f 2-mal stetig diffbar.

$\operatorname{grad} f(x) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0, y = 0$

$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

char. P. von $\operatorname{Hess} f(0,0)$: $\begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2$ hat die beiden NSt $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$.

f hat nur in $(0,0)$ ein lokales Extremum, und zwar e. lokales Min.

Bsp 10 Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. durch $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2y)$

$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; das char. P. hat die NSt $2, -2$; f hat in $(0,0)$ keinen Extremwert.

Bsp 11 Sei $f_1(x,y) := x^2 + y^4$

$f_2(x,y) := x^2$

$f_3(x,y) := x^2 + y^3$

Für $i = 1, 2, 3$ gilt:

Der Gradient in $(0,0)$ ist $(0,0)$.

$\operatorname{Hess} f_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat die NSt -2 und 0 (Bem 2 nicht anwendbar)

Direkt nach Def. ist klar:

f_1 hat in $(0,0)$ e. isol. Min

f_2 " lokales Min, nicht isol. (alle Pkt auf der y-Achse sind e. lokales Min)

f_3 " kein Extremum.

Volumenberechnung im $\mathbb{R}^3$

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben.

Ziel: Führe unter geeigneten Voraussetzungen ein Maß für das Volumen von S ein.

Zunächst einige Vorbereitungen:

Def 3: Seien $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Dann heißt $W_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0 \le x \le x_0 + r,\ y_0 \le y \le y_0 + r,\ z_0 \le z \le z_0 + r\}$ Würfel (mit der Kantenlänge r). Das Volumen von W_r wird def. durch $\mathrm{Vol}\, W_{a,b} := r^3$.
Dies entspricht der Anschauung.

Bem 12: Sei S beschränkt, d.h. S ist enthalten in einem (hinreichend "großen") Würfel.

Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
Teile den $\mathbb{R}^3$ auf in ein "Gitter" von Würfeln mit der Kantenlänge r.

Sei $\underline{V_r}(S)$ das Gesamtvolumen der Würfel mit Kantenlänge r, die ganz in S liegen.

Sei $\underline{\mathrm{Vol}}(S) := \sup\{\underline{V_r}(S) \mid r > 0\}$. ($\underline{\mathrm{Vol}}(S)$ existiert, da S beschränkt ist).

Sei $\overline{V_r}(S)$ das Gesamtvolumen der Würfel mit Kantenlänge r, die einen nichtleeren Durchschnitt mit S besitzen.

Sei $\overline{\mathrm{Vol}}(S) := \inf\{\overline{V_r}(S) \mid r > 0\}$ ($\overline{\mathrm{Vol}}(S)$ existiert, da S beschränkt ist)

Offenbar gilt stets $\underline{\mathrm{Vol}}(S) \le \overline{\mathrm{Vol}}(S)$.

Im Fall $\underline{\mathrm{Vol}}(S) = \overline{\mathrm{Vol}}(S)$, wird definiert: $\mathrm{Vol}(S) := \underline{\mathrm{Vol}}(S) = \overline{\mathrm{Vol}}(S)$ (Volumen von S).
S heißt meßbar, falls $\mathrm{Vol}(S)$ existiert.

Def 4: $a \in \mathbb{R}^3$ Randpunkt von S :$\Leftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält die ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ mindestens einen Punkt aus S und mindestens einen Punkt aus dem Komplement $\complement S$ von S.

Sei $R(S)$ die Menge der Randpunkte von S.

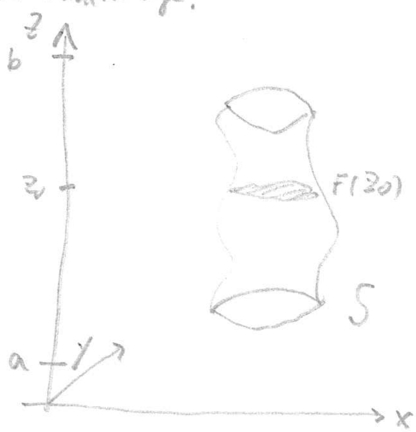
Def 5: $M \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Würfel $W_1, \dots, W_n$ existieren mit

$$M \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_n \quad \text{und} \quad \mathrm{Vol}(W_1) + \dots + \mathrm{Vol}(W_n) < \varepsilon.$$

Bem 13: Die Vereinigung endlich vieler Nullmengen ist offenbar wieder Nullmenge.

Bem 14: S meßbar $\Leftrightarrow$ $R(S)$ Nullmenge. (ohne Beweis)

Bem 15: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkt. Für alle $(x,y,z) \in S$ gelte $a \le z \le b$.
(ohne Bew.) Für jedes $z_0 \in [a,b]$ existiere der Flächeninhalt $F(z_0)$ von $\{(x,y,z_0) \mid (x,y,z_0) \in S\}$ (im Sinne des Riemann-Integrals)
Dann ist S meßbar, das Integral $\int_a^b F(z)\,dz$ ex.
und es gilt $\mathrm{Vol}(S) = \int_a^b F(z)\,dz$.



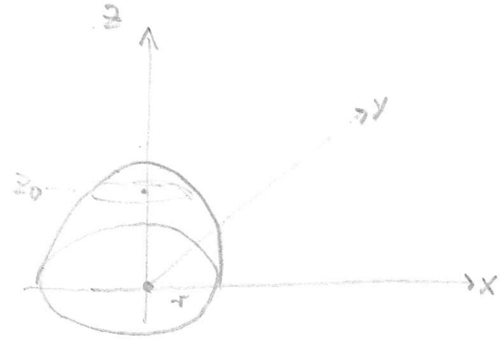
Bem 16: Sei $I \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt und abgeschlossen.
(ohne Bew.) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig
Sei $S_f := \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in I\}$ der zu f gehörige "fliegende Teppich".
Dann ist S_f eine Nullmenge.

Bsp 12 (Halbkugel)

Betrachte die Halbkugel H_r definiert durch

$H_r := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2, 0 \le z\}$ mit Radius r und $(0,0,0)$ als Mittelpunkt.

Wir betrachten den Rand $R(H_r)$ der Halbkugel. Dieser setzt sich aus 2 Teilen zusammen:



Zu $R(H_r)$ gehört

$K_r := \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le r^2\} \in \mathbb{R}^3$, also das innere des Kreises vom Radius r um den Nullpunkt in der (x,y)-Ebene (mit Rand)

Sei $f: K_r \to \mathbb{R}$ def. durch

$f(x,y) := \sqrt{r^2-x^2-y^2}$.

Dann liegt $(x,y,f(x,y))$ auf der "Oberfläche" der Halbkugel H_r.

Also ist $O_r := \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in K_r\}$ die "Oberfläche" der Halbkugel H_r.

Die Menge $R(H_r)$ der Randpunkte von H_r ist also $R(H_r) = K_r \cup O_r$.

Offenbar ist K_r eine Nullmenge (trivial nach Def.)

Da f stetig ist, ist nach Bem 5 O_r ebenfalls eine Nullmenge.

Nach Bem 2 ist dann auch $R(H_r) = K_r \cup O_r$ eine Nullmenge.

Nach Bem 3 ist H_r also meßbar; d.h. es ex $Vol(H_r)$.

Berechnung von $Vol(H_r)$:

$H_r(z_0) := \{(x,y,z_0) \mid (x,y,z_0) \in H_r\}$ ist das innere eines Kreises vom Radius $\sqrt{r^2-z_0^2}$

Wir kennen den Flächeninhalt eines Kreises. Demnach besitzt $H_r(z_0)$ den Flächeninhalt $\pi(r^2-z_0^2)$

Nach Bem 4 ist

$$Vol(H_r) = \int_0^r \pi(r^2-z^2)\,dz = \left(\pi r^2 \cdot z - \frac{\pi z^3}{3}\right)\Big|_0^r = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2\pi}{3} r^3.$$

Literatur

Forster; Analysis I, II

Endl, Luh ; Analysis I, II

Blatter ; Analysis I, II

Heuser ; Lehrbuch der Analysis I, II

Kemnitz ; Mathematik zum Studienbeginn